CHAPITRE II. Systèmes linéaires libres à un degré de liberté.

2.1 Oscillateurs libres

Un système oscillant en absence de toute force **d'excitation**, est appelé **oscillateur libre**. Le nombre des grandeurs indépendantes intervenant dans le mouvement est appelé **degré de liberté**.

2.2 Oscillateur harmonique

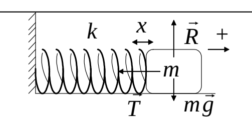
En mécanique, on appelle oscillateur **harmonique** un oscillateur qui, dès qu'il soit écarté de sa position d'équilibre d'une distance x (ou angle θ), est soumis à une force de rappel opposée et proportionnelle à l'écartement x (ou θ) :

$$\boxed{F = -Cx.} \tag{2.1}$$

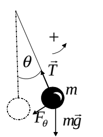
C : une constante **positive**.

Exemples

a) Le système masse-ressort ci-contre est un oscillateur harmonique car la force de rappel est $T = -kx$.



b) La force de rappel du pendule simple est $F_\theta = -mg\sin\theta$.
Le pendule devient un oscillateur harmonique lorsque $\theta \ll 1$, car pour $\theta \ll 1$: $F_\theta = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$.



2.3 Pulsation propre d'un oscillateur harmonique

l'**équation du mouvement** d'un oscillateur harmonique est **linéaire** et de la forme

$$\boxed{\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0} \tag{2.2}$$

(En mécanique $q = x, y, z, \theta, \varphi, ...$ En électricité $q = i, u, q, ...$).
L'équation horaire $q(t)$ (solution de (2.2)) est de la forme:

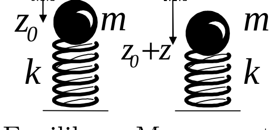
$$\boxed{q(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi).} \tag{2.3}$$

ω_0 est appelée pulsation **propre** car elle ne dépend que des grandeurs propres à l'oscillateur. L'amplitude A et la phase ϕ dépendent des conditions initiales.

Remarques:
- Un système physique dont l'équation est **linéaire** est appelé **système linéaire**.
- Le facteur à coté de q dans l'équation (2.2) doit être **positif** pour **qu'il y ait** oscillations.

Exemples

a)
- Trouver à l'aide du PFD l'équation du mouvement du système ci-contre.
- Calculer sa pulsation propre pour $m = 1$kg et $k = 3$N/m.
- Trouver l'amplitude A et la phase ϕ sachant qu'initialement la masse est poussée 2cm vers le bas puis lancée vers le haut à une vitesse de 2cm/s.



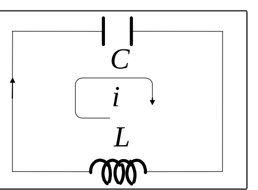
Equilibre Mouvement

Solution

- PFD en équilibre : $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow mg - kz_0 = 0$.
  PFD en mouvement : $\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \Longrightarrow m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T} = m\overrightarrow{a} \Longrightarrow mg - k\,(z + z_0) = m\ddot{z}$.
  Grâce à l'équation d'équilibre $mg - kz_0 = 0$, l'équation du mouvement se simplifie: $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$.
  - La pulsation propre est $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{3}$**rad/s**.
- L'équation horaire est: $z(t) = A\sin(\sqrt{3}t + \phi)$. Utilisons les conditions initiales pour trouver A et ϕ:

$$\begin{cases} z\,(0) = A\sin\phi = 2\text{cm} \\ \dot{z}\,(0) = A\sqrt{3}\cos\phi = -2\text{cm/s} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \tan\phi = -\sqrt{3} \Longrightarrow \phi = \boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}. \\ A = \dfrac{2}{\sin\phi} \approx \dfrac{2}{0,87} \approx \mathbf{2,3}\text{cm}. \end{cases}$$

b) Trouver à l'aide de la loi des mailles l'équation du mouvement de la charge q dans le circuit ci-contre, puis déduire la pulsation propre ω_0.
Solution: La loi des mailles s'écrit:
$u_C + u_L = 0 \Longrightarrow \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0 \Longrightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.$
La pulsation propre est donc $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.



2.4 L'énergie d'un oscillateur harmonique

L'énergie d'un oscillateur harmonique est la somme de ses énergies cinétiques et potentielles:

$$\boxed{E = T + U.} \tag{2.5}$$

- L'énergie cinétique de translation d'un corps de masse m et de vitesse v est

$$\boxed{T_{translation} = \frac{1}{2}mv^2. \quad \text{Pour une bobine } T = \frac{1}{2}Li^2.} \tag{2.6}$$

- L'énergie cinétique de rotation d'un corps de moment d'inertie $I_\triangle$ autour d'un axe $\triangle$ et de vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est

$$\boxed{T_{rotation} = \frac{1}{2}I_\triangle \dot{\theta}^2.} \tag{2.7}$$

- L'énergie potentielle d'une masse m dans un champ gravitationnel constant g est:

$$\boxed{U_{masse} = mgh. \quad \text{(Lors d'une ascension d'une hauteur } h)} \tag{2.8}$$

$$\boxed{U_{masse} = -mgh. \quad \text{(Lors d'une descente d'une hauteur } h)} \tag{2.9}$$

- L'énergie potentielle d'un ressort à boudin de raideur k lors d'une déformation d est

$$\boxed{U_{ressort} = \frac{1}{2}kd^2. \quad \text{Pour un condensateur } U = \frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2.} \tag{2.10}$$

- L'énergie potentielle d'un ressort de torsion de raideur K lors d'une déformation θ est

$$\boxed{U_{ressort} = \frac{1}{2}K\theta^2.} \tag{2.11}$$

Remarque: L'énergie totale $E = T + U$ est conservée (constante) durant le mouvement:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = 0.} \tag{2.12}$$

Cette **équation de conservation** donne l'équation du mouvement des systèmes conservés.

Exemple

$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$. $\quad U = \frac{1}{2}k(z+z_0)^2 - mg(z+z_0).$
$\qquad = \frac{1}{2}kz^2 + kz_0 z - mgz - mgz_0 + \frac{1}{2}kz_0{}^2$
Grâce à la condition d'équilibre $mg - kz_0 = 0$, on a $kz_0 z - mgz = 0$.
U se simplifie alors en $U = \frac{1}{2}kz^2 - mgz_0 + \frac{1}{2}kz_0{}^2 = \frac{1}{2}kz^2 + \mathrm{C}^{te}$.

$E = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}kz^2 + \mathrm{C}^{te}$. $\quad \frac{dE}{dt} = 0 \Longrightarrow m\dot{z}\ddot{z} + kz\dot{z} = 0 \Longrightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0,$
qui est bien l'équation du mouvement trouvée à l'aide du PFD.

z_0 m k — Equilibre
z_0+z m k — Mouvement

2.5 Condition d'équilibre

La condition d'équilibre est $F = 0$. Si l'équilibre est en $x = x_0$, on écrit $F|_{x=x_0} = 0$.

Pour une force dérivant d'un potentiel ($F = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$), la **condition d'équilibre** s'écrit:

$$\boxed{\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0.} \qquad (2.13)$$

• L'équilibre d'un système est stable si, une fois écarté de sa position d'équilibre, il y retourne. Le système retourne à son équilibre si F est une force de rappel. Puisque $F = -Cx$, on aura une force de rappel si $C > 0$.

Comme $C = -\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, la condition d'équilibre **stable** s'écrit:

$$\boxed{\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} > 0.} \qquad (2.14)$$

Cette condition est aussi une **condition d'oscillation**.

• L'équilibre d'un système est instable si le système ne regagne pas son équilibre lors d'un écartement, c-à-d si $C < 0$. La condition d'équilibre **instable** s'écrit donc:

$$\boxed{\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} < 0.} \qquad (2.15)$$

(Pour les rotations, (2.13), (2.14), et (2.15) deviennent: $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0} = 0$, $\left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} > 0$, $\left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} < 0$.)

Exemple

Trouver les positions d'équilibre et leur nature pour le système ci-contre.

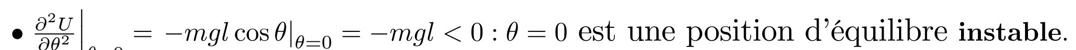
Solution

L'énergie potentielle lors d'un écartement θ de la verticale est:

$U = -mgh = -mg\,(l - l\cos\theta)$. Les positions d'équilibre sont données par $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$.

$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow -mgl\sin\theta = 0 \Longrightarrow \sin\theta = 0$.

Les positions d'équilibres sont donc: $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.



• $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = -mgl\cos\theta|_{\theta=0} = -mgl < 0$: $\theta = 0$ est une position d'équilibre **instable**.

• $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\pi} = -mgl\cos\theta|_{\theta=\pi} = mgl > 0$: $\theta = \pi$ est une position d'équilibre **stable**.



2.6 Equation de Lagrange (1788)

L'équation de **Lagrange** (appelée aussi équation d'**Euler-Lagrange**) est

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0.} \qquad (2.16)$$

$\mathcal{L} = T - U$ est appelé le **Lagrangien**.

L'équation de Lagrange donne aussi directement l'équation du mouvement.

(Pour les translations $q = x,\ y,\ z$. Pour les rotations $q = \theta,\ \varphi, ...$ En électricité $q = q$.)

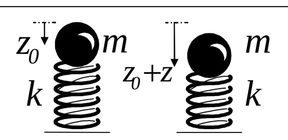
Exemple

$T = \frac{1}{2}m\,\dot{z}^2$. $\quad U = \frac{1}{2}kz^2 + \text{C}^{te}$.

Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\,\dot{z}^2 - \frac{1}{2}kz^2 + \text{C}^{te}$.

L'équation du mouvement est donc:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{z}\right) + kz = 0 \Longrightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0,$



qui est bien l'équation obtenue à l'aide du PFD puis à l'aide de l'équation de conservation.